Université de Haute-Alsace
2022/2023
Outils Géométrie CPB 1 ENSCMU - PC renfort
Quentin Ehret *quentin.ehret@uha.fr*

Chapitre 4 : Application linéaires et théorème du rang

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. L'objectif de ce chapitre est de décrire les applications linéaires, qui sont des applications entre espaces vectoriels qui préservent la structure d'espace vectoriel, dans un sens que l'on précisera.

1 Généralités

Définition 1

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev, et $f : E \longrightarrow F$ une application. f est dite $\mathbb{K}$-linéaire si

1. pour tous $x, y \in E$, $f(x+y) = f(x) + f(y)$;
2. pour tous $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Notation : On note $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ l'ensemble des application $\mathbb{K}$-linéaires de E vers F.

Exemples :

1. L'application nulle :
$$\begin{aligned} f_0 : E &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto 0_F; \end{aligned}$$
2. L'application identité :
$$\begin{aligned} id : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x; \end{aligned}$$
3. La dérivation de polynômes :
$$\begin{aligned} d : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto P'; \end{aligned}$$
4. Autres exemples :
$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\longmapsto 2x - y; \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} 2x - y \\ x + y \\ 2y \end{pmatrix}; \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x - y \\ x + y \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_5 : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto P(2); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 : \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ g &\longmapsto \begin{pmatrix} \int_a^b g \\ g(1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Contrexemples : les deux applications suivantes ne sont pas linéaires :

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ x &\longmapsto (x^2, 2x); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} t_a : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}, \qquad (\text{pour } a \neq 0) \\ x &\longmapsto x + a. \end{aligned}$$

Proposition 2 (propriétés des applications linéaires)

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.

1. $f(0_E) = 0_F$;
2. $f(-x) = -f(x)$;
3. $f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n) = \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_n f(x_n)$;
4. $\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$ est $\mathbb{K}$-ev.

Définition 3

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E,F)$.

- Si $E = F$, f est appelée **endomorphisme**.
- Si f est bijective, f est appelée **isomorphisme**.
- Si f est à la fois un endomorphisme et un isomorphisme, f est appelée **automorphisme**.
- Si $F = \mathbb{R}$, f est appelée **forme linéaire**.

Exemple d'automorphisme :

$$\begin{aligned} f_3 : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x,y) &\longmapsto \begin{pmatrix} x-y \\ x+y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un automorphisme. Son inverse est donnée par

$$\begin{aligned} (f_3)^{-1} : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (u,v) &\longmapsto \begin{pmatrix} \frac{u+v}{2} \\ \frac{u-v}{2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2 Image et noyau d'une application linéaire

Définition 4

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

- $\ker(f) = \{x \in E,\ f(x) = 0\}$ est le **noyau** de f.
- $\mathrm{im}(f) = \{y \in F,\ \exists x \in E,\ y = f(x)\}$ est **l'image** de f.

Proposition 5

$\mathrm{im}(f)$ et $\ker(f)$ est des sous-espaces vectoriels de F et E, respectivement.

Démonstration. Soient $x, y \in \ker(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda x + y \in \ker(f)$.

$$f(\lambda x + y) = \lambda f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0.$$

Soient $u, v \in \mathrm{im}(f)$ et $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons que $\lambda u + v \in \mathrm{im}(f)$. On écrit $u = f(x)$, $x \in E$ et $v = f(y)$, $y \in E$. Ainsi,

$$\lambda u + v = \lambda f(x) + f(y) = f(\lambda x + y).$$

De plus, ces deux ensembles sont non-vides car $0_E \in \ker(f)$ et $0_F \in \mathrm{im}(f)$. □

Exemples :

On reprend les applications des exemples précédents :

1. $\ker(f_0) = E$; $\mathrm{im}(f_0) = \{0_F\}$.
2. $\ker(id) = \{0_E\}$; $\mathrm{im}(id) = E$.
3. $\ker(f_1) = \{(x, y) \in E,\ y = 2x\}$; $\mathrm{im}(f_1) = \{u \in \mathbb{R},\ u = 2x - y\} = \mathbb{R}$.
4. $\ker(f_2) = \{(x, y) \in E,\ (x - 2y,\ x + y\ 2y) = (0, 0, 0)\} = \{(0, 0, 0)\}$; $\mathrm{im}(f_2) = \text{plan} \begin{cases} u = x - 2y \\ v = x + y \\ w = 2y \end{cases}$.

Exercice : Trouver les noyaux et images des autres exemples.

Définition 6

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. On appelle **rang** de f le nombre

$$\mathrm{rg}(f) := \dim(\mathrm{im}(f)).$$

Proposition 7

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$.

1. f injective $\Longleftrightarrow \ker(f) = \{0_E\}$.
2. f surjective $\Longleftrightarrow \mathrm{im}(f) = F$.

Démonstration. 1. ($\Rightarrow$) Supposons f injective. Soit $x \in \ker(f)$, montrons que $x = 0$. Par définition, $f(x) = 0$. Or, $f(0) = 0$. Comme f est injective, on conclut que $x = 0$.

($\Leftarrow$) Supposons $\ker(f) = \{0\}$. Soient $x, y \in E$ tels que $f(x) = f(y)$. Montrons que $x = y$. On a $0 = f(x) - f(y) = f(x - y)$, donc $x - y \in \ker(f)$. Ainsi $x - y = 0$.

2. ($\Rightarrow$) Supposons f surjective. Alors pour tout $y \in F$, il existe $x \in E$ tel que $y = f(x)$, donc $y \in \mathrm{im}(f)$. Ainsi, $F \subset \mathrm{im}(F)$. Or, il est clair que $\mathrm{im}(f) \subset F$, donc $F = \mathrm{im}(f)$.

   ($\Leftarrow$) Supposons que $\mathrm{im}(f) = F$. Soit $y \in F$. Alors $y \in \mathrm{im}(F)$, donc il existe x tel que $y = f(x)$, donc f est surjective.

□

Proposition 8

Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $\{x_1, x_2, ...x_n\}$ une famille de vecteurs de E.

1. Si f est injective et $\{x_i\}_i$ est libre dans E, alors $\{f(x_i)\}_i$ est libre dans F.
2. Si f est surjective et $\{x_i\}_i$ est génératrice de E, alors $\{f(x_i)\}_i$ est génératrice de F.

Démonstration.

1. Supposons f injective et $\{x_i\}_i$ libre. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_i \lambda_i f(x_i) = 0$. Montrons que tous les λ_i sont nuls. En utilisant la linéarité de f, on obtient que

$$f\left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i\right) = 0.$$

   Or, f est injective, donc son noyau est réduit à 0. Ainsi $\sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i = 0$. Mais la famille $\{x_i\}_i$ est libre, donc tous les λ_i sont nuls.

2. Soit $y \in F$, $y = f(x)$, $x \in E$ (car f surjective). Comme $\{x_i\}_i$ est génératrice, on peut écrire $x = \sum_i \lambda_i x_i$. Donc

$$y = f(x) = f\left(\sum_i \lambda_i x_i\right) = \sum_i \lambda_i f(x_i).$$

   Donc $\{f(x_i)\}_i$ est génératrice de F.

□

Théorème 9

Deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie sont isomorphes si et seulement si ils ont même dimension.

Démonstration. Soient E et F de dimension finie.

($\Rightarrow$) Supposons qu'il existe un isomorphisme $f : E \longrightarrow F$, qui est donc injectif et surjectif. Soit $\{e_i\}$ une base de E. Par le résultat précédent, $\{f(e_i)\}$ est une base de F. Donc ils ont même dimension.

($\Leftarrow$) Supposons $\dim(E) = \dim(F) = n$, et notons $\{e_i\}$ une base de E. Alors

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ x = (x_1 e_1 + ... + x_n e_n) &\longmapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \end{aligned}$$

est un isomorphisme. Ainsi $E \cong \mathbb{K}^n$. De même, $F \cong \mathbb{K}^n$. Finalement $E \cong F$.

□

Théorème 10 (Théorème du rang)

Soient E, F de dimension finie et $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Alors

$$\dim_{\mathbb{K}}(E) = \operatorname{rg}(f) + \dim_{\mathbb{K}}(\ker(f)).$$

Démonstration. Supposons $\dim_{\mathbb{K}}(E) = n$, $\dim_{\mathbb{K}}(\ker(f)) = r$. Montrons que $\dim(\operatorname{im}(f)) = n - r$.

Soit $\{w_1, ..., w_r\}$ une base de $\ker(f)$. On peut compléter cette famille en une base de E : on note $\{v_1, ..., v_{n-r}\}$ une famille telle que $\{w_1, ..., w_r, v_1, ..., v_{n-r}\}$ soit une base de E. On pose alors

$$\mathcal{B} = \{f(v_1), ..., f(v_{n-r})\}.$$

On va montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\operatorname{im}(f)$, ce qui prouvera que $\dim(\operatorname{im}(f)) = n - r$.

- $\mathcal{B}$ est génératrice. Soit $y = f(x) \in \operatorname{im}(f)$. On écrit

  $$x = \lambda_1 w_1 + ... + \lambda_r w_r + \mu_1 v_1 + ... + \mu_{n-r} vn - r.$$

  Ainsi,

  $$\begin{aligned} y &= \overbrace{\lambda_1 f(w_1) + ... + \lambda_r f(w_r)}^{=0} + \mu_1 f(v_1) + ... + \mu_{n-r} f(v_{n-r}) \\ &= 0 + \sum_{i=1}^{n-r} \mu_i f(v_i). \end{aligned}$$

- $\mathcal{B}$ est libre. Soient $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tels que $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i f(v_i) = 0$. Alors $\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i (v_i) \in \ker(f)$. Comme les w_i forment une base de $\ker(f)$, on écrit

  $$\sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i (v_i) = a_1 v_1 + ... + a_r w_r, \ a_i \in \mathbb{K}.$$

  Ainsi, on a

  $$a_1 v_1 + ... + a_r w_r + \lambda_1 v_1 + ... + \lambda_{n-r} v_{n-r} = 0.$$

  Mais $\{w_1, ..., w_r, v_1, ..., v_{n-r}\}$ est une base de E, donc est libre. Ainsi on déduit que les a_i et les λ_j sont tous nuls. En particulier, $\mathcal{B}$ est libre.

□

Corollaire 11

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Supposons $\dim(E) = \dim(F)$, finie. Alors

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

Démonstration. Il suffit de montrer f injective $\iff$ f surjective.
f injective $\iff \ker(f) = \{0\} \iff \dim(E) = \operatorname{rg}(f)$ par le théorème du rang. Or, $\dim(E) = \dim(F)$, donc $\dim(F) = \operatorname{rg}(f)$. Finalement, on a montré que f injective $\iff F = \operatorname{im}(f)$, ce qui est équivalent à f surjective.

□

Remarque. FAUX en dimension infinie ! Par exemple,

$$\begin{aligned} \mathbb{K}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}[X] \\ P &\longmapsto P' \end{aligned}$$

est surjective, mais pas injective.

3 Matrice d'une application linéaire

On a vu que $f : E \longrightarrow F$ linéaire est entièrement définie si on stipule les images par f des vecteurs de base de E. Cela signifie que si $\mathcal{B} = \{e_i\}$ est une base de E, alors la donnée de $\{f(e_i)\}$ détermine complètement f :

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + ... + x_ne_n \in E \Longrightarrow f(x) = x_1f(e_1) + x_2f(e_2) + ... + x_nf(e_n) \in F.$$

Ceci va permettre d'exprimer f sous forme de matrice.

3.1 Matrice associée à une application linéaire

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, $\dim(E) = n$, $\dim(F) = p$. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. On note $\mathcal{B} = \{e_1, ..., e_n\}$ une base de E et $\mathcal{B}' = \{\varepsilon_1, ..., \varepsilon_p\}$ une base de F. On peut alors écrire les équations suivantes, en décomposant les images des vecteurs de la base $\mathcal{B}$ dans la base $\mathcal{B}'$:

$$\begin{cases} f(e_1) = a_{11}\,\varepsilon_1 + ... + a_{p1}\,\varepsilon_p \\ f(e_2) = a_{12}\,\varepsilon_1 + ... + a_{p2}\,\varepsilon_p \\ \qquad\vdots \\ f(e_n) = a_{1n}\,\varepsilon_1 + ... + a_{pn}\,\varepsilon_p \end{cases}$$

On obtient alors la matrice de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ en écrivant dans le colonne i les composantes du vecteur $f(e_i)$ dans la base $\mathcal{B}$:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & ... & a_{pn} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ f(e_1) & f(e_2) & & f(e_n) \end{array} \end{array} = (a_{i,j})_{i,j}.$$

Remarque.
- La matrice dépend clairement du choix des bases ;
- Si f est un endomorphisme, on prend $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$ et on note alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(f)$.

Proposition 12

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev, de dimension n et p respectivement, et munis des bases $\mathcal{B}$ pour E et $\mathcal{B}'$ pour F. Alors

$$\begin{aligned} \alpha : \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F) &\longrightarrow M_{pn}(\mathbb{K}) \\ f &\longmapsto \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) \end{aligned}$$

est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-ev.

Remarque. Cela signifie qu'il est équivalent de se donner une application linéaire de E vers F ou une matrice de $M_{pn}(\mathbb{K})$. En particulier, pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $f, g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$,

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\lambda f + g) = \lambda\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(g).$$

De plus, $\dim_{\mathbb{K}}(\mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)) = np$.

Exemples :

1. Application identité :

$$\begin{aligned} \mathrm{id} : & E \longrightarrow E \\ & x \longmapsto x, \end{aligned}$$

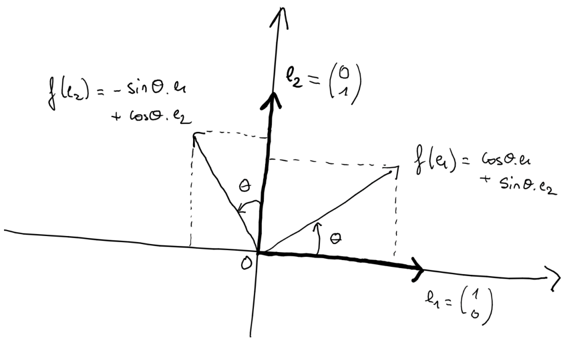
   avec $\dim(E) = n$ et $\mathcal{B}$ une base de E. Alors $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathrm{id}) = I_n$.

2. Projection : soit $E = \mathbb{R}^2$ muni de la base canonique $\{e_1, e_2\}$.

$$\begin{aligned} p_1 : & \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y) \longmapsto (x, 0). \end{aligned}$$

   On calcule : $p_1(e_1) = e_1$, $p_1(e_2) = 0$. Ainsi, $\mathrm{Mat}(p_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

3. Rotation : $E = \mathbb{R}^2$, muni de la base canonique. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On regarde l'application f qui effectue une rotation d'angle θ.



   On obtient $\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

4. On note $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$ et $\{e_1, e_2, e_3\}$ celle de $\mathbb{R}^3$. On considère

$$\begin{aligned} f : & \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ & (x, y, z) \longmapsto (x - y, z - y). \end{aligned}$$

   On calcule : $f(e_1) = \varepsilon_1$; $f(e_2) - \varepsilon_1 - \varepsilon_2$; $f(e_3) = \varepsilon_2$. On trouve donc

$$\mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

L'importance de ce point de vue est mis en lumière par la proposition suivante :

Proposition 13

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev. On note $\mathcal{B} = (e_i)_{1 \leq i \leq n}$ une base de E, et $\mathcal{B}' = (\varepsilon_i)_{1 \leq i \leq p}$ une base de F. Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$. Si $x \in E$, on l'écrit sous forme d'un vecteur colonne X avec ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$. De même, on écrit $f(x)$ sous la forme d'un vecteur colonne Y dans la base $\mathcal{B}'$. Alors

$$Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(f) \cdot X.$$

Note : Si $x = x_1 e_1 + ... + x_n e_n$, alors $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Démonstration. Notons $\mathrm{Mat}(f) = (a_{ij})_{1\leq i\leq n}^{1\leq j\leq p}$. Alors $f(e_j) = \sum_{i=1}^{p} a_{ij}\,\varepsilon_i$. Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in E$, alors

$$f(X) = \sum_{j=1}^{n} x_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{n} x_j \sum_{k=1}^{p} a_{kj}\,\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{p} \underbrace{\sum_{j=1}^{n} a_{kj} x_j}_{y_k}\,\varepsilon_k = \sum_{k=1}^{p} y_k\,\varepsilon_k\,.$$

On a montré que $Y = f(x) = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix}$ dans la base $\mathcal{B}'$. D'autre part, un calcul matriciel rapide montre que $\mathrm{Mat}(f)X = Y$. □

Exemple : Dans $\mathbb{R}^2$ muni de la base canonique, quelle est l'image du vecteur $(3, 2)$ par f la rotation d'angle $\frac{\pi}{6}$?

$$\mathrm{Mat}(f) = \mathrm{Mat}(f) = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{6} & -\sin\frac{\pi}{6} \\ \sin\frac{\pi}{6} & \cos\frac{\pi}{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3\sqrt{3}}{2} - 1 \\ \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Proposition 14

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-ev, de dimension finie, munis des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'\,\mathcal{B}''$. Soient $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(F, G)$. Alors

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}''}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}''}(g) \cdot \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(f).$$

Remarque. Si f est bijective, cette proposition implique que $\mathrm{Mat}(f^{-1}) = \mathrm{Mat}(f)^{-1}$.

Changement de base. Comment un changement de base affecte la représentation matricielle d'une application ? On considère $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, avec $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F. Si $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, que valent $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}'}(f)$, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$?

Proposition 15

Soit $f \in \mathcal{L}_{\mathbb{K}}(E, F)$, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E et $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F. On note $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f)$, $A' = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{C}'}(f)$, $P = P_{\mathcal{B}\longrightarrow\mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}\longrightarrow\mathcal{C}'}$. Alors

$$A' = Q^{-1}AP.$$